SÉRIE VIII. — TOME IV. N° 12. DÉCEMBRE 1943

LE JOURNAL DE PHYSIQUE

ET

LE RADIUM

PROPAGATION DES CHARGES ÉLECTRIQUES SUR LES PELLICULES FAIBLEMENT CONDUCTRICES

Par GEORGES DESTRIAU.

École Centrale des Arts et Manufactures, Paris
et Laboratoire de physique des travaux pratiques du P.C.B., Faculté des Sciences de Paris.

Sommaire. — L'auteur reprend l'étude de la propagation dans le cas d'une self négligeable et d'une résistance très élevée (pellicule faiblement conductrice séparée d'une lame métallique par une feuille mince de substance diélectrique), les phénomènes de propagation peuvent être extrêmement lents dans ce cas.

On examine plus spécialement le cas d'une différence de potentiel sinusoïdale appliquée entre les extrémités des deux électrodes, l'amortissement est considérable et les phénomènes de réflexion négligeables dès que la longueur des électrodes devient de l'ordre de la longueur d'onde.

La vitesse de propagation de la phase est d'autant plus élevée que la fréquence est élevée, mais la longueur d'onde étant plus faible les harmoniques sont plus rapidement amortis. Enfin le calcul montre qu'on peut obtenir, en haute fréquence, des capacités variables constituées par de minces dépôts obtenus par projection cathodique.

PREMIÈRE PARTIE.

Étude théorique.

Introduction. — L'étude de la propagation des charges le long des conducteurs conduit à l'équation bien connue dite « des télégraphistes » que je rappelle brièvement.

C_1, R_1, L_1 représentant respectivement la capacité, la résistance et la self par unité de longueur du conducteur; V la différence de potentiel entre un point du conducteur et le sol et i l'intensité à travers une section à l'abscisse x. La loi d'Ohm fournit

$$-\frac{\partial V}{\partial x} = R_1 i + L_1 \frac{\partial i}{\partial t}; \qquad (1)$$

par ailleurs en écrivant de deux façons différentes l'accroissement de charge dans le temps dt de l'élément MM', on a

$$C_1 \frac{\partial V}{\partial t} = -\frac{\partial i}{\partial x}. \qquad (2)$$

Ces deux relations par élimination de i ou de V conduisent aux deux relations

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} &= C_1 L_1 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + R_1 C_1 \frac{\partial V}{\partial t}, \\ \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} &= C_1 L_1 \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} + R_1 C_1 \frac{\partial i}{\partial t}. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Dans l'étude classique des fils conducteurs, on se place dans le cas de R_1 négligeable, on retrouve ainsi l'équation différentielle classique de propagation d'une onde plane avec vitesse de propagation u donnée par la formule de Thomson

$$u = \frac{1}{\sqrt{C_1 L_1}}.$$

Les vitesses ainsi calculées sont légèrement inférieures à la vitesse de la lumière dans le vide.

Dans l'étude des oscillations forcées des conducteurs (différence de potentiel sinusoïdale appliquée entre un point du conducteur et le sol), on montre qu'il peut se produire des systèmes d'ondes stationnaires. La vitesse de propagation du fait de la résis-

tance non nulle est légèrement fonction de la fréquence.

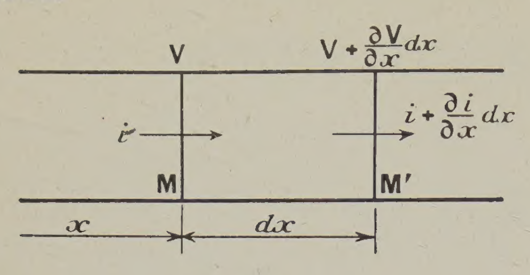


Fig. 1.

J'envisagerai ici le cas opposé, R_1 très grand et L_1 négligeable, c'est notamment le cas d'une pellicule faiblement conductrice séparée d'un bon conducteur par une lame isolante, les équations (3) deviennent alors

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = R_1 C_1 \frac{\partial V}{\partial t}, \qquad \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = R_1 C_1 \frac{\partial i}{\partial t}.$$

En désignant par ρ la résistivité de la pellicule d'épaisseur ε, par e l'épaisseur du diélectrique de pouvoir inducteur spécifique K et par (a) la largeur de la lame

$$R_1\,\mathrm{d}x = \rho\,\frac{\mathrm{d}x}{a\varepsilon}, \qquad R_1 = \frac{\rho}{a\varepsilon};$$

$$C_1\,\mathrm{d}x = K\frac{a\,\mathrm{d}x}{4\pi e}, \qquad C_1 = \frac{Ka}{4\pi e};$$

$$R_1 C_1 = \frac{K\rho}{4\pi e\varepsilon}.$$

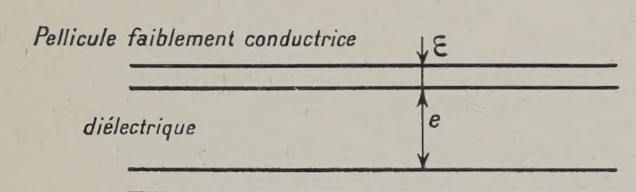


Fig. 2.

Les équations ci-dessus deviennent

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{K\rho}{4\pi e\varepsilon}\frac{\partial V}{\partial t}, \qquad \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = \frac{K\rho}{4\pi e\varepsilon}\frac{\partial i}{\partial t}$$

ou en posant

$$A^2 = \frac{K\rho}{8\pi e\varepsilon}, \tag{4}$$

on a

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 2A^2\frac{\partial V}{\partial t}, \qquad \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = 2A^2\frac{\partial V}{\partial t}. \tag{5}$$

Propagation d'une perturbation électrique. — La forme des équations différentielles (5) est classique (équation de la chaleur). Posons

$$Z = \frac{x}{\sqrt{t}},$$

on a

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{1}{t}V''_Z \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial V}{\partial t} = -\frac{Z}{2t}V'_Z.$$

L'équation devient

$$V''_Z = -A^2 z V'_Z, \qquad \frac{\mathrm{d}V'_Z}{V'_Z} = -A^2 Z\,\mathrm{d}Z.$$

Supposons qu'à l'instant zéro, nous mettions en communication l'extrémité de la pellicule ($x = 0$) avec une source à potentiel constant V_0, les conditions limites sont les suivantes :

$V = 0$ pour $t = 0$ quel que soit x, c'est-à-dire pour $Z = \infty$.

$V = V_0$ quel que soit t pour $x = 0$, c'est-à-dire pour $Z = 0$; d'où

$$V' = M\,e^{-\frac{A^2 z^2}{2}} \qquad (M = \text{constante d'intégration}),$$

$$\mathrm{d}V = M\frac{\sqrt{2}}{A}\,e^{-\frac{A^2 z^2}{2}}\;\frac{A}{\sqrt{2}}\,\mathrm{d}z.$$

En faisant le changement de variable $\zeta = \frac{AZ}{\sqrt{2}}$ et remarquant que $\frac{M\sqrt{2}}{A}$ est une nouvelle constante P, on a

$$\mathrm{d}V = P\,e^{-\zeta^2}\,\mathrm{d}\zeta;$$

or, pour $z = 0$, $\zeta = 0$ et nous avons vu plus haut $V = V_0$, d'où

$$V - V_0 = P\int_0^\zeta e^{-\zeta^2}\,\mathrm{d}\zeta,$$

de plus, pour $z = \infty$,

$$\zeta = \infty \qquad \text{et} \qquad V = 0,$$

et comme

$$\int_0^\infty e^{-\zeta^2}\,\mathrm{d}\zeta = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

on détermine la valeur de la constante

$$P = -\frac{2V_0}{\sqrt{\pi}}.$$

On obtient finalement

$$V = V_0 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}V_0\int_0^\zeta e^{-\zeta^2}\,\mathrm{d}\zeta \tag{6}$$

avec

$$\zeta = \frac{Ax}{\sqrt{2t}}.$$

Il résulte de ces considérations que le potentiel V_0 ne s'établit pas instantanément à l'abscisse x, théoriquement ce potentiel n'est même atteint qu'asymptotiquement pour t infini ($\zeta = 0$). Recher-

chons le temps t nécessaire pour que le potentiel à l'abscisse x soit une fraction donnée de V_0, par exemple $\frac{V_0}{2}$, on déduit de la relation (6)

$$\int_0^{\zeta} e^{-\zeta^2}\, d\zeta = \frac{\sqrt{\pi}}{4},$$

ce qui donne

$$\zeta = 0{,}4769 \neq 0{,}48, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{x}{\sqrt{t}} = \frac{0{,}48\sqrt{2}}{A}.$$

Les valeurs de l'abscisse et du temps sont liées par la relation $\frac{x}{\sqrt{t}} = \text{const.} = C$ et la valeur de cette constante dépend de A, plus A est faible, plus la valeur constante de $\frac{x}{\sqrt{t}}$ est élevée, plus par suite la propagation est rapide.

De la relation

$$\frac{x}{\sqrt{t}} = C,$$

nous déduisons la vitesse

$$\frac{dx}{dt} = \frac{C}{2\sqrt{t}} = \frac{C^2}{2x}.$$

C'est une grandeur variable allant en décroissant dans le temps et avec l'abscisse. Pour des pellicules très résistantes, on obtient des vitesses extrêmement faibles qui ont pu être observées grâce à certains phénomènes d'électrophotoluminescence [1].

Ondes progressives, conducteur illimité. — Appliquons à l'extrémité entre la lame métallique et la pellicule une différence de potentiel sinusoïdale

$$V = V_0 \sin \omega t,$$

partie imaginaire de

$$V = V_0\, e^{i\omega t}$$

et cherchons, pour le potentiel V à l'abscisse x une expression de la forme

$$V = V_x\, e^{i\omega t}.$$

V_x étant une fonction de x, on a

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{d^2(V_x)}{dx^2}\, e^{i\omega t}, \qquad \frac{\partial V}{\partial t} = i\omega V_x\, e^{i\omega t}.$$

L'équation (5) fournit ainsi

$$\frac{d^2 V_x}{dx^2} = i^2 A^2 \omega V_x,$$

équation différentielle dont la caractéristique

$$\beta^2 = i^2 A^2 \omega$$

admet pour racines

$$\beta = \pm A\sqrt{2\omega}\sqrt{i}, \qquad \beta = \pm A\sqrt{\omega}(1 + i);$$

on obtient donc

$$V = V_1\, e^{A\sqrt{\omega}x}\, e^{i(\omega t + A\sqrt{\omega}x)} + V_2\, e^{-A\sqrt{\omega}x}\, e^{i(\omega t - A\sqrt{\omega}x)},$$

c'est-à-dire, en ne conservant que les parties imaginaires

$$V = V_1\, e^{A\sqrt{\omega}x} \sin(\omega t + A\sqrt{\omega}x) + V_2\, e^{-A\sqrt{\omega}x} \sin(\omega t - A\sqrt{\omega}x). \tag{7}$$

Ces deux solutions correspondent à deux perturbations se propageant en sens inverse (perturbation incidente et perturbation réfléchie); la vitesse de propagation s'obtient en écrivant que la phase reste constante

$$\omega t \pm A\sqrt{\omega}x = \text{const.}, \qquad \omega\, dt \pm A\sqrt{\omega}\, dx = 0,$$

$$u = \frac{dx}{dt} = \mp \frac{\sqrt{\omega}}{A}$$

ou, en remplaçant A par sa valeur (4),

$$u = \mp\sqrt{\frac{8\pi e \varepsilon \omega}{K\rho}}. \tag{8}$$

En faisant apparaître la « longueur d'onde » espace sur lequel se propage la perturbation pendant une période, on a

$$\lambda = uT = u\frac{2\pi}{\omega} = \frac{\sqrt{\omega}}{A}\frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{A\sqrt{\omega}},$$

$$A\sqrt{\omega} = \frac{2\pi}{\lambda}. \tag{9}$$

L'équation (7) devient ainsi

$$V = V_1\, e^{\frac{2\pi x}{\lambda}} \sin\left(\omega t + \frac{2\pi x}{\lambda}\right) + V_2\, e^{-\frac{2\pi x}{\lambda}} \sin\left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda}\right). \tag{10}$$

Dans le cas du conducteur illimité, on doit avoir $V = 0$ pour x infini, d'où $V_1 = 0$, de plus pour $x = 0$ l'amplitude est V_0, d'où $V_2 = V_0$; on a donc simplement

$$\boxed{V = V_0\, e^{-\frac{2\pi x}{\lambda}} \sin\left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda}\right)} \quad \text{conducteur illimité.} \tag{11}$$

Numériquement, l'expression de la vitesse de propagation [relation (8)] fournit

$$u_{\text{cm/sec}} = \sqrt{\frac{8\pi e \varepsilon \omega}{K_0 \rho_0}\,\frac{3^2 \cdot 10^{20}}{10^9}} = 3 \cdot 10^5 \sqrt{\frac{80\pi e \varepsilon \omega}{K_0 \rho_0}},$$

K_0 étant exprimé dans le système électrostatique, c'est-à-dire considéré comme « un nombre » sans dimension, ρ_0 étant la résistivité en ohms par centimètre, e et ε exprimés en centimètres.

Ainsi, avec l'eau distillée $\rho_0 = 10^5\ \Omega$/cm, $\varepsilon = 1$ mm,

[1] MERCIER et DESTRIAU, *Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, 9 décembre 1937.

$e = 2$ mm, $K_0 = 5$, $\omega = 100\,\pi$ (fréquence 50 p),

$$u = 168 \text{ m/sec},$$

la longueur d'onde correspondante est

$$\lambda = 3{,}36 \text{ m}.$$

La relation (11) montre que l'amortissement est considérable, sur la seule distance d'une demi-longueur d'onde, l'amplitude est multipliée par $e^{-\pi} = 0{,}043$, c'est-à-dire dans le cas présent sur une distance de 1,68 m.

Il suffit donc d'une pellicule de longueur relativement restreinte pour que les effets de la réflexion soient pratiquement négligeables.

Remarquons que, d'après (9) $\lambda = \frac{2\pi}{A\sqrt{\omega}}$, la longueur d'onde décroît quand la fréquence croît, l'amortissement devient ainsi plus considérable à fréquence élevée; la vitesse de propagation par contre croît comme la racine carrée de la fréquence.

Ondes stationnaires, conducteur limité. — *Prenons pour origine l'extrémité où s'effectue la réflexion* et supposons qu'en ce point il y ait un nœud de potentiel, c'est-à-dire qu'à cette extrémité la pellicule faiblement conductrice vienne au contact de la plaque métallique inférieure.

La relation (10) donne

$$V = V_1 e^{\frac{2\pi x}{\lambda}} \sin\left(\omega t + \frac{2\pi x}{\lambda}\right) + V_2 e^{-\frac{2\pi x}{\lambda}} \sin\left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda}\right).$$

Pour $x = 0$,

$$V = 0,$$

d'où

$$V_1 + V_2 = 0;$$

ainsi

$$V = V_1\left[e^{\frac{2\pi x}{\lambda}}\left(\sin\omega t \cos\frac{2\pi x}{\lambda} + \sin\frac{2\pi x}{\lambda}\cos\omega t\right) - e^{-\frac{2\pi x}{\lambda}}\left(\sin\omega t\cos\frac{2\pi x}{\lambda} - \sin\frac{2\pi x}{\lambda}\cos\omega t\right)\right],$$

$$V = 2V_1\left[\operatorname{sh}\frac{2\pi x}{\lambda}\cos\frac{2\pi x}{\lambda}\sin\omega t + \operatorname{ch}\frac{2\pi x}{\lambda}\sin\frac{2\pi x}{\lambda}\cos\omega t\right].$$

L'expression entre crochets est la somme de deux fonctions sinusoïdales en quadrature d'amplitudes

$$a = \operatorname{sh}\frac{2\pi x}{\lambda}\cos\frac{2\pi x}{\lambda} \quad \text{et} \quad b = \operatorname{ch}\frac{2\pi x}{\lambda}\sin\frac{2\pi x}{\lambda},$$

on a donc

$$V = 2V_1[M\sin(\omega t + \varphi)],$$

avec

$$M = \sqrt{\operatorname{sh}^2\frac{2\pi x}{\lambda}\cos^2\frac{2\pi x}{\lambda} + \operatorname{ch}^2\frac{2\pi x}{\lambda}\sin^2\frac{2\pi x}{\lambda}},$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\operatorname{tg}\frac{2\pi x}{\lambda}}{\operatorname{th}\frac{2\pi x}{\lambda}},$$

or

$$M^2 = \operatorname{sh}^2\frac{2\pi x}{\lambda}\left(1 - \sin^2\frac{2\pi x}{\lambda}\right) + \left(1 + \operatorname{sh}^2\frac{2\pi x}{\lambda}\right)\sin^2\frac{2\pi x}{\lambda},$$

$$M^2 = \operatorname{sh}^2\frac{2\pi x}{\lambda} + \sin^2\frac{2\pi x}{\lambda},$$

d'où, en définitive,

$$V = 2V_1\sqrt{\operatorname{sh}^2\frac{2\pi x}{\lambda} + \sin^2\frac{2\pi x}{\lambda}}\,\sin(\omega t + \varphi),$$

or, pour $x = l$ (l longueur du conducteur), l'amplitude de V est V_0, on a donc

$$V_0 = 2V_1\sqrt{\operatorname{sh}^2\frac{2\pi l}{\lambda} + \sin^2\frac{2\pi l}{\lambda}}$$

et finalement

$$\boxed{V = V_0\sqrt{\frac{\operatorname{sh}^2\frac{2\pi x}{\lambda} + \sin^2\frac{2\pi x}{\lambda}}{\operatorname{sh}^2\frac{2\pi l}{\lambda} + \sin^2\frac{2\pi l}{\lambda}}}\,\sin(\omega t + \varphi), \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{\operatorname{tg}\frac{2\pi x}{\lambda}}{\operatorname{th}\frac{2\pi x}{\lambda}}.} \tag{12}$$

Supposons maintenant qu'à l'extrémité il y ait un nœud de courant, c'est-à-dire que l'extrémité de la pellicule *soit isolée*.

On a toujours [relation (10)],

$$V = V_1 e^{\frac{2\pi x}{\lambda}}\sin\left(\omega t + \frac{2\pi x}{\lambda}\right) + V_2 e^{-\frac{2\pi x}{\lambda}}\sin\left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda}\right);$$

or, d'après (2),

$$C_1\frac{\partial V}{\partial t} = -\frac{\partial i}{\partial x},$$

ainsi

$$i = -\frac{C_1 V_1\omega\lambda}{4\pi}e^{\frac{2\pi x}{\lambda}}\left[\sin\left(\omega t + \frac{2\pi x}{\lambda}\right) + \cos\left(\omega t + \frac{2\pi x}{\lambda}\right)\right] + \frac{C_1 V_2\omega\lambda}{4\pi}e^{-\frac{2\pi x}{\lambda}}\left[\sin\left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda}\right) + \cos\left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda}\right)\right].$$

En prenant encore pour origine l'extrémité libre où se produit la réflexion, on a $i = 0$ pour $x = 0$,

$$-V_1 + V_2 = 0, \qquad V_2 = V_1,$$

d'où

$$V = V_1 \left[e^{\frac{2\pi x}{\lambda}} \left(\sin\omega t \cos\frac{2\pi x}{\lambda} + \sin\frac{2\pi x}{\lambda}\cos\omega t \right) + e^{-\frac{2\pi x}{\lambda}} \left(\sin\omega t \cos\frac{2\pi x}{\lambda} - \sin\frac{2\pi x}{\lambda}\cos\omega t \right) \right],$$

$$V = 2V_1 \left[\operatorname{ch}\frac{2\pi x}{\lambda}\cos\frac{2\pi x}{\lambda}\sin\omega t + \operatorname{sh}\frac{2\pi x}{\lambda}\sin\frac{2\pi x}{\lambda}\cos\omega t \right],$$

l'expression entre crochets est, comme précédemment, la somme de deux fonctions sinusoïdales en quadratures d'amplitudes

$$a = \operatorname{ch}\frac{2\pi x}{\lambda}\cos\frac{2\pi x}{\lambda}, \qquad b = \operatorname{sh}\frac{2\pi x}{\lambda}\sin\frac{2\pi x}{\lambda},$$

on a donc

$$V = 2V_1 \sqrt{\operatorname{ch}^2\frac{2\pi x}{\lambda}\cos^2\frac{2\pi x}{\lambda} + \operatorname{sh}^2\frac{2\pi x}{\lambda}\sin^2\frac{2\pi x}{\lambda}}\,\sin(\omega t + \varphi)$$

avec

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{th}\frac{2\pi x}{\lambda}\operatorname{tg}\frac{2\pi x}{\lambda};$$

or

$$\begin{aligned}
&\operatorname{ch}^2\frac{2\pi x}{\lambda}\cos^2\frac{2\pi x}{\lambda} + \operatorname{sh}^2\frac{2\pi x}{\lambda}\sin^2\frac{2\pi x}{\lambda}\\
&= \operatorname{ch}^2\frac{2\pi x}{\lambda}\left(1 - \sin^2\frac{2\pi x}{\lambda}\right) + \left(\operatorname{ch}^2\frac{2\pi x}{\lambda} - 1\right)\sin^2\frac{2\pi x}{\lambda}\\
&= \operatorname{ch}^2\frac{2\pi x}{\lambda} - \sin^2\frac{2\pi x}{\lambda}\\
&= 1 + \operatorname{sh}^2\frac{2\pi x}{\lambda} - \left(1 - \cos^2\frac{2\pi x}{\lambda}\right)\\
&= \operatorname{sh}^2\frac{2\pi x}{\lambda} + \cos^2\frac{2\pi x}{\lambda},
\end{aligned}$$

d'où

$$V = 2V_1 \sqrt{\operatorname{sh}^2\frac{2\pi x}{\lambda} + \cos^2\frac{2\pi x}{\lambda}}\,\sin(\omega t + \varphi),$$

mais, pour $x = l$, l'amplitude de potentiel étant V_0, on a

$$2V_1 = \frac{V_0}{\sqrt{\operatorname{sh}^2\frac{2\pi l}{\lambda} + \cos^2\frac{2\pi l}{\lambda}}}$$

et finalement

$$\boxed{V = V_0 \sqrt{\frac{\operatorname{sh}^2\frac{2\pi x}{\lambda} + \cos^2\frac{2\pi x}{\lambda}}{\operatorname{sh}^2\frac{2\pi l}{\lambda} + \cos^2\frac{2\pi l}{\lambda}}}\,\sin(\omega t + \varphi) \quad \text{avec} \quad \operatorname{tg}\varphi = \operatorname{th}\frac{2\pi x}{\lambda}\operatorname{tg}\frac{2\pi x}{\lambda}.} \qquad (13)$$

Remarque. — Les expressions (12) et (13) fournissent des amplitudes variant périodiquement avec l'abscisse autour de valeurs déterminées par une courbe voisine de $sh\frac{2\pi x}{\lambda}$, mais, pratiquement si $\frac{l}{\lambda}$ est tant soit peu important (même de l'ordre de l'unité) et $\frac{x}{\lambda}$ de même, les termes en $\cos^2\frac{2\pi x}{\lambda}$, ou $\sin^2\frac{2\pi x}{\lambda}$ sont négligeables devant le $sh^2\frac{2\pi x}{\lambda}$ qui lui-même se trouve sensiblement réduit à la valeur de l'exponentielle $e^{\frac{4\pi x}{\lambda}}$, on a alors sensiblement

$$V = V_0 \frac{e^{\frac{2\pi x}{\lambda}}}{e^{\frac{2\pi l}{\lambda}}}\sin(\omega t + \varphi),$$

$$V = V_0 e^{-\frac{2\pi(l-x)}{\lambda}}\sin(\omega t + \varphi),$$

par ailleurs

$$\operatorname{th}\frac{2\pi x}{\lambda} \# 1 \quad \text{et par suite} \quad \varphi \# \frac{2\pi x}{\lambda},$$

$$\boxed{V \# V_0 e^{-\frac{2\pi(l-x)}{\lambda}}\sin\left(\omega t + \frac{2\pi x}{\lambda}\right).}$$

Cette expression est tout à fait identique à celle trouvée dans le cas des ondes progressives [formule (11)] en remarquant que, dans ce dernier cas, l'origine étant à l'extrémité où s'applique la d.d.p. $V = V_0 \sin\omega t$, on a

x de la formule (11) $= (l - x)$ de la formule précédente

et

ωt » $= \omega t - \frac{2\pi l}{\lambda}$ » »

Donc, en définitive, si la longueur de la pellicule est suffisante, quel que soit le cas envisagé et à part une petite correction à l'extrémité, l'amplitude de potentiel décroît suivant une exponentielle simple en $e^{-\frac{2\pi x}{\lambda}}$ à partir du point où se trouve appliqué le potentiel sinusoïdal.

Suivant les valeurs de x (origine à l'extrémité où s'effectue la réflexion), on obtient les valeurs suivantes pour

$$y_1 = \sqrt{\operatorname{sh}^2\frac{2\pi x}{\lambda} + \sin^2\frac{2\pi x}{\lambda}}$$

et

$$y_2 = \sqrt{\operatorname{sh}^2\frac{2\pi x}{\lambda} + \cos^2\frac{2\pi x}{\lambda}}.$$

Les variations de y_1 et y_2 en fonction de $\frac{x}{\lambda}$ sont représentées sur les courbes de la figure 3; elles représentent par une modification convenable de

l'échelle des ordonnées les variations de l'amplitude de potentiel à partir de l'extrémité libre. A part la perturbation due à l'extrémité, les deux courbes deviennent rapidement confondues.

$\frac{x}{\lambda}$.	y_1.	y_2.
$0 = 0$	0	1
$\frac{1}{120} = 0,00833$	0,074	0,9999
$\frac{1}{72} = 0,0139$	0,123	0,99995
$\frac{1}{60} = 0,0166$	0,148	1
$\frac{1}{40} = 0,0250$	0,222	1,0001
$\frac{1}{30} = 0,0333$	0,296	1,0006
$\frac{1}{20} = 0,050$	0,444	1,0032
$\frac{1}{15} = 0,0666$	0,593	1,0102
$\frac{1}{10} = 0,1000$	0,892	1,0507
$\frac{1}{8} = 0,1250$	1,12	1,120
$\frac{1}{6} = 0,1666$	1,52	1,346
$\frac{1}{5} = 0,2000$	1,87	1,643
$\frac{1}{4} = 0,2500$	2,51	2,300
$\frac{1}{3} = 0,3333$	4,08	4,03
$\frac{1}{2} = 0,5000$	11,6	11,6
$\frac{3}{4} = 0,7500$	55,7	55,7
$1 = 1,0000$	267	267,0

L'étude précédente a été conduite en se plaçant dans les deux cas limites extrêmes, nœud ou ventre à l'extrémité libre, on pourrait envisager le cas intermédiaire où l'extrémité de la pellicule faiblement conductrice serait reliée à la plaque conductrice par l'intermédiaire par exemple d'un condensateur, ainsi sans qu'il y ait ventre de courant ou nœud de potentiel, l'intensité pour $x = 0$ serait le courant de charge de ce condensateur. L'étude est un peu semblable à celle, classique, de l'influence d'une capacité ou d'une self ajoutée à la base d'une antenne.

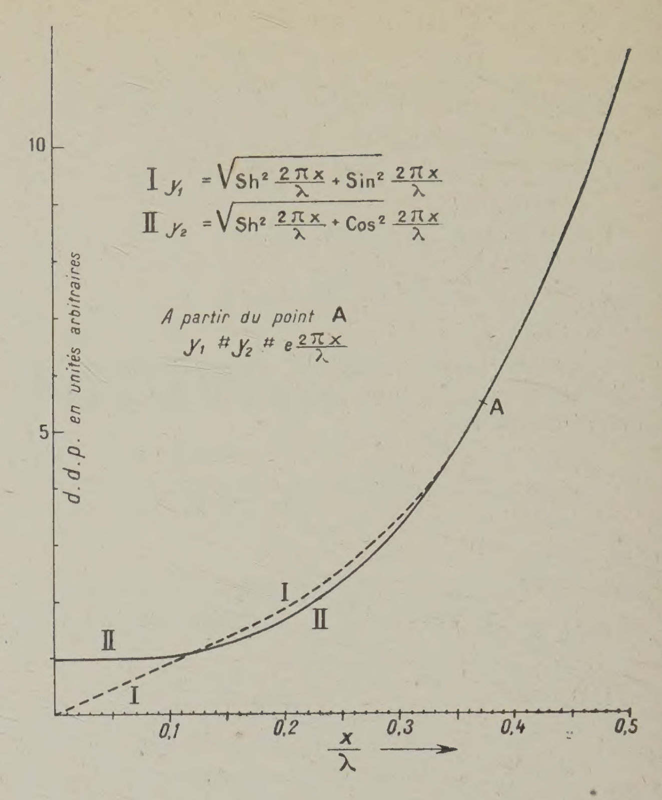


Fig. 3. — Expression de l'amplitude de la différence de potentiel à partir de l'extrémité libre.

I. Les 2 électrodes venant en contact.
II. Les 2 électrodes restant isolées.

DEUXIÈME PARTIE.

Conséquences théoriques.

1. Filtration des harmoniques. — Appliquons une différence de potentiel qui soit une fonction périodique quelconque, les divers harmoniques se propagent avec des vitesses d'autant plus élevées que leur rang est élevé. Les longueurs d'onde correspondantes sont cependant d'autant plus faibles que la fréquence est élevée (d'après la remarque de la page 252) et, par suite, l'amortissement est bien plus important pour les grandes fréquences.

Il est donc possible de choisir une pellicule de longueur suffisante pour que les harmoniques soient pratiquement évanouis, mais de longueur pas trop élevée cependant pour que l'oscillation fondamentale conserve une valeur appréciable à l'extrémité.

Ainsi, même en commandant la pellicule par un montage fournissant des impulsions (oscillations de relaxation), on doit recueillir à l'extrémité libre une d. d. p. pratiquement sinusoïdale.

2. Capacité équivalente. — Les résultats précédents laissent entrevoir qu'un condensateur dont

l'une des armatures est faiblement conductrice, doit se comporter comme une capacité variable suivant la fréquence; reprenons le calcul dans le cas d'une pellicule possédant un *ventre de potentiel à l'extrémité libre* (extrémité isolée).

Nous avons dans ce cas [la relation (10), compte tenu de la première condition de la page 252],

$$V = V_1\left[e^{\frac{2\pi x}{\lambda}}\sin\left(\omega t + \frac{2\pi x}{\lambda}\right) + e^{-\frac{2\pi x}{\lambda}}\sin\left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda}\right)\right],$$

la relation (2)

$$C_1\frac{\partial V}{\partial t} = -\frac{\partial i}{\partial x}$$

fournit alors

$$\frac{\partial i}{\partial x} = -\omega C_1 V_1\left[e^{\frac{2\pi x}{\lambda}}\cos\left(\omega t + \frac{2\pi x}{\lambda}\right) + e^{-\frac{2\pi x}{\lambda}}\cos\left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda}\right)\right],$$

or,

$$\int e^{\frac{2\pi x}{\lambda}}\cos\left(\omega t + \frac{2\pi x}{\lambda}\right)\mathrm{d}x = \frac{\lambda}{4\pi}e^{\frac{2\pi x}{\lambda}}\left[\sin\left(\omega t + \frac{2\pi x}{\lambda}\right) + \cos\left(\omega t + \frac{2\pi x}{\lambda}\right)\right],$$

$$\int e^{-\frac{2\pi x}{\lambda}}\cos\left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda}\right)\mathrm{d}x = -\frac{\lambda}{4\pi}e^{-\frac{2\pi x}{\lambda}}\left[\sin\left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda}\right) + \cos\left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda}\right)\right],$$

d'où

$$i = \frac{\omega\lambda C_1 V_1}{4\pi}\left\{e^{-\frac{2\pi x}{\lambda}}\left[\sin\left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda}\right) + \cos\left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda}\right)\right] - e^{\frac{2\pi x}{\lambda}}\left[\sin\left(\omega t + \frac{2\pi x}{\lambda}\right) + \cos\left(\omega t + \frac{2\pi x}{\lambda}\right)\right]\right\},$$

$$i = \frac{\omega\lambda C_1 V_1}{4\pi}\left\{\begin{aligned} & e^{-\frac{2\pi x}{\lambda}}\cos\frac{2\pi x}{\lambda}\sin\omega t - e^{-\frac{2\pi x}{\lambda}}\sin\frac{2\pi x}{\lambda}\cos\omega t \\ & e^{-\frac{2\pi x}{\lambda}}\sin\frac{2\pi x}{\lambda}\sin\omega t + e^{-\frac{2\pi x}{\lambda}}\cos\frac{2\pi x}{\lambda}\cos\omega t \\ -& e^{-\frac{2\pi x}{\lambda}}\cos\frac{2\pi x}{\lambda}\sin\omega t - e^{\frac{2\pi x}{\lambda}}\sin\frac{2\pi x}{\lambda}\cos\omega t \\ & e^{\frac{2\pi x}{\lambda}}\sin\frac{2\pi x}{\lambda}\sin\omega t - e^{\frac{2\pi x}{\lambda}}\cos\frac{2\pi x}{\lambda}\cos\omega t \end{aligned}\right\}$$

$$i = -\frac{\omega\lambda C_1 V_1}{2\pi}\left[\left(\mathrm{sh}\frac{2\pi x}{\lambda}\cos\frac{2\pi x}{\lambda} - \mathrm{ch}\frac{2\pi x}{\lambda}\sin\frac{2\pi x}{\lambda}\right)\sin\omega t + \left(\mathrm{sh}\frac{2\pi x}{\lambda}\cos\frac{2\pi x}{\lambda} + \mathrm{ch}\frac{2\pi x}{\lambda}\sin\frac{2\pi x}{\lambda}\right)\cos\omega t\right],$$

d'où

$$i = -\frac{\omega\lambda C_1 V_1}{2\pi}M\sin(\omega t + \varphi)$$

avec

$$\begin{aligned} M^2 &= 2\left(\mathrm{sh}^2\frac{2\pi x}{\lambda}\cos^2\frac{2\pi x}{\lambda} + \mathrm{ch}^2\frac{2\pi x}{\lambda}\sin^2\frac{2\pi x}{\lambda}\right) \\ &= 2\left[\mathrm{sh}^2\frac{2\pi x}{\lambda}\left(1 - \sin^2\frac{2\pi x}{\lambda}\right) + \left(1 + \mathrm{sh}^2\frac{2\pi x}{\lambda}\right)\sin^2\frac{2\pi x}{\lambda}\right], \end{aligned}$$

$$\boxed{M^2 = 2\left(\mathrm{sh}^2\frac{2\pi x}{\lambda} + \sin^2\frac{2\pi x}{\lambda}\right)}$$

et

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{\mathrm{sh}\frac{2\pi x}{\lambda}\cos\frac{2\pi x}{\lambda} + \mathrm{ch}\frac{2\pi x}{\lambda}\sin\frac{2\pi x}{\lambda}}{\mathrm{sh}\frac{2\pi x}{\lambda}\cos\frac{2\pi x}{\lambda} - \mathrm{ch}\frac{2\pi x}{\lambda}\sin\frac{2\pi x}{\lambda}},$$

$$\boxed{\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{\mathrm{th}\frac{2\pi x}{\lambda} + \mathrm{tg}\frac{2\pi x}{\lambda}}{\mathrm{th}\frac{2\pi x}{\lambda} - \mathrm{tg}\frac{2\pi x}{\lambda}}.}$$

Comme par ailleurs dans ce cas, on a (page 253),

$$V_1 = \frac{V_0}{2\sqrt{\mathrm{sh}^2\frac{2\pi l}{\lambda} + \cos^2\frac{2\pi l}{\lambda}}},$$

on a finalement

$$\boxed{\begin{aligned} i &= -\frac{\omega\lambda C_1 V_0}{4\pi}\sqrt{2\,\frac{\mathrm{sh}^2\frac{2\pi x}{\lambda} + \sin^2\frac{2\pi x}{\lambda}}{\mathrm{sh}^2\frac{2\pi l}{\lambda} + \cos^2\frac{2\pi l}{\lambda}}}\,\sin(\omega t + \varphi), \\ \mathrm{tg} &= \frac{\mathrm{th}\frac{2\pi x}{\lambda} + \mathrm{tg}\frac{2\pi x}{\lambda}}{\mathrm{th}\frac{2\pi x}{\lambda} - \mathrm{tg}\frac{2\pi x}{\lambda}}, \end{aligned}} \tag{14}$$

la première de ces deux relations peut s'écrire sous la forme

$$i = I\sin(\omega t + \varphi + \pi).$$

En particulier pour $x = l$, l'amplitude du courant de charge est

$$I = \frac{\omega\lambda C_1 V_0}{4\pi}\sqrt{2\,\frac{\mathrm{sh}^2\frac{2\pi l}{\lambda} + \sin^2\frac{2\pi l}{\lambda}}{\mathrm{sh}^2\frac{2\pi l}{\lambda} + \cos^2\frac{2\pi l}{\lambda}}}.$$

Si $\frac{l}{\lambda}$ est très petit (cas général des condensateurs à lames métalliques épaisses)

$$\mathrm{sh}\frac{2\pi l}{\lambda} \# \sin\frac{2\pi l}{\lambda} \# \frac{2\pi l}{\lambda},$$

$$\mathrm{sh}^2\frac{2\pi l}{\lambda} + \cos^2\frac{2\pi l}{\lambda} \# 1,$$

d'où

$$I \# \frac{\omega\lambda C_1 V_0}{4\pi}\sqrt{2\left(\frac{4\pi^2 l^2}{\lambda^2} + \frac{4\pi^2 l^2}{\lambda^2}\right)} = \omega(C_1 l)V_0,$$

or

$$C_1 l = C, \quad \text{capacité totale.}$$

On retrouve bien ainsi le résultat classique

$$I = \omega C V_0,$$

de même

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\operatorname{th}\frac{2\pi l}{\lambda} + \operatorname{tg}\frac{2\pi l}{\lambda}}{\operatorname{th}\frac{2\pi l}{\lambda} - \operatorname{tg}\frac{2\pi l}{\lambda}} = \frac{\dfrac{\operatorname{th}\frac{2\pi l}{\lambda}}{\operatorname{tg}\frac{2\pi l}{\lambda}} + 1}{\dfrac{\operatorname{th}\frac{2\pi l}{\lambda}}{\operatorname{tg}\frac{2\pi l}{\lambda}} - 1},$$

pour $\frac{l}{\lambda}$ faible, posons

$$\frac{2\pi l}{\lambda} = \varepsilon,$$

$$\operatorname{th}\varepsilon = \varepsilon\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{3} + \ldots\right), \qquad \operatorname{tg}\varepsilon = \varepsilon\left(1 + \frac{\varepsilon^2}{3} + \ldots\right).$$

D'où

$$\frac{\operatorname{th}\varepsilon}{\operatorname{tg}\varepsilon} = \frac{1 - \frac{\varepsilon^2}{3} + \ldots}{1 + \frac{\varepsilon^2}{3} + \ldots} < 1,$$

donc

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\frac{\operatorname{th}\varepsilon}{\operatorname{tg}\varepsilon} + 1}{\frac{\operatorname{th}\varepsilon}{\operatorname{tg}\varepsilon} - 1} \to -\infty,$$

$$\varphi \to -\frac{\pi}{2},$$

or, comme le décalage de i sur V est $\pi + \varphi$ on voit que ce décalage tend vers

$$\pi - \frac{\pi}{2} = +\frac{\pi}{2},$$

ce qui est bien conforme au résultat classique (courant de charge en avance de $+\frac{\pi}{2}$ sur la tension appliquée).

Par contre si l n'est pas très petit, ce qui peut arriver en haute fréquence avec des électrodes métalliques suffisamment minces, on a pour expression du courant de charge

$$i = \frac{\omega\lambda C_1 V_0}{4\pi}\sqrt{2\,\frac{\operatorname{sh}^2\frac{2\pi l}{\lambda} + \sin^2\frac{2\pi l}{\lambda}}{\operatorname{sh}^2\frac{2\pi l}{\lambda} + \cos^2\frac{2\pi l}{\lambda}}}\,\sin(\omega t + \varphi + \pi),$$

avec

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\operatorname{th}\frac{2\pi l}{\lambda} + \operatorname{tg}\frac{2\pi l}{\lambda}}{\operatorname{th}\frac{2\pi l}{\lambda} - \operatorname{tg}\frac{2\pi l}{\lambda}} \quad \text{et} \quad C_1 = \frac{Ka}{4\pi e} \qquad (15)$$

(a, largeur de la pellicule;
e, épaisseur du diélectrique de pouvoir inducteur spécifique K).

En appelant I' l'amplitude de i donnée par la formule classique sans tenir compte des effets de propagation

$$I' = C\omega V_0 = C_1 l \omega V_0.$$

On a

$$\frac{I}{I'} = \frac{1}{4\pi}\frac{\lambda}{l}\sqrt{2\,\frac{\operatorname{sh}^2\frac{2\pi l}{\lambda} + \sin^2\frac{2\pi l}{\lambda}}{\operatorname{sh}^2\frac{2\pi l}{\lambda} + \cos^2\frac{2\pi l}{\lambda}}}. \qquad (16)$$

Application numérique. — Considérons un condensateur dont l'une des armatures est une feuille mince d'étain de $\varepsilon = \frac{1}{100}$ mm d'épaisseur ($\varepsilon = 10^{-3}$ cm), résistivité de l'étain $\rho_0 = 10.10^{-6}$ Ω/cm. Soit $e = \frac{1}{10}$ mm $= 10^{-2}$ cm, l'épaisseur du diélectrique de pouvoir inducteur $K_0 = 5$ et soit une fréquence de 10^6 c/s

$$\omega = 2\pi.10^6.$$

La relation (8) donne pour la vitesse de propagation

$$u = 53.10^8 \text{ cm/sec.}$$

D'où la longueur d'onde

$$\lambda = \frac{u}{f} = \frac{53.10^8}{10^6} = 5300 \text{ cm} = 53 \text{ m.}$$

Pour une fréquence 100 fois plus élevée (10^8 c/s), on a λ 10 fois plus faible, soit

$$\lambda = 5{,}3 \text{ m} = 530 \text{ cm.}$$

Pour un condensateur de longueur l telle que

$$\frac{l}{\lambda} = \frac{1}{30},$$

la formule (16) (compte tenu des valeurs du tableau de la page 254) donne

$$\frac{I}{I'} = \frac{1}{4\pi} 30\sqrt{2}\,\frac{0{,}296}{1{,}0006} = 0{,}999.$$

Pour $l = \frac{1}{10}$

$$\frac{I}{I'} = \frac{1}{4\pi} 10\sqrt{2}\,\frac{0{,}892}{1{,}05} = 0{,}95.$$

Pour $l = \frac{1}{8}$

$$\frac{I}{I'} = \frac{1}{4\pi} 8\sqrt{2}\,\frac{1{,}12}{1{,}12} = 0{,}900.$$

Pour $\frac{1}{4}$

$$\frac{I}{I'} = \frac{1}{4\pi} 4\sqrt{2}\,\frac{2{,}51}{2{,}30} = 0{,}491.$$

L'effet ne devient donc appréciable que pour des

valeurs de $\frac{l}{\lambda}$ supérieures à $\frac{1}{8}$; étant donné les longueurs d'onde trouvées ci-dessus cela conduit à des condensateurs inusités pour les fréquences indiquées.

Ainsi, avec les feuilles métalliques, on ne peut espérer trouver d'effet appréciable qu'avec les minces dépôts obtenus par projection cathodique, d'épaisseur de quelques dizaines d'angströms, car, outre les épaisseurs très faibles ainsi obtenues, les résistivités des métaux en lames minces sont bien plus élevées.

Quand $\frac{l}{\lambda}$ croît indéfiniment, l'amplitude du courant de charge tend [d'après la première équation (15)] vers

$$I \to \frac{\omega\lambda C_1 V_0}{4\pi}\sqrt{2};$$

tout se passe comme si la capacité prenait la valeur limite

$$\frac{C_1\lambda\sqrt{2}}{4\pi},$$

au lieu de $C_1 l$.

On a de plus, pour l grand,

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{1 + \operatorname{tg}\frac{2\pi l}{\lambda}}{1 - \operatorname{tg}\frac{2\pi l}{\lambda}},$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} + \operatorname{tg}\frac{2\pi l}{\lambda}}{1 - \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\operatorname{tg}\frac{2\pi l}{\lambda}},$$

$$\varphi = \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi l}{\lambda}.$$

Les mêmes calculs peuvent être effectués dans le cas d'un *nœud de potentiel* à l'extrémité libre. On a dans ces conditions

$$V = V_1\left[e^{\frac{2\pi x}{\lambda}}\sin\left(\omega t + \frac{2\pi x}{\lambda}\right) - e^{-\frac{2\pi x}{\lambda}}\sin\left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda}\right)\right]$$

et finalement

$$i = \frac{\omega C_1\lambda}{4\pi} V_0 \sqrt{2\,\frac{\operatorname{sh}^2\frac{2\pi x}{\lambda} + \cos^2\frac{2\pi x}{\lambda}}{\operatorname{sh}^2\frac{2\pi l}{\lambda} + \sin^2\frac{2\pi x}{\lambda}}}\,\sin(\omega t + \varphi + \pi)$$

avec

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{1 + \operatorname{th}\frac{2\pi x}{\lambda}\operatorname{tg}\frac{2\pi x}{\lambda}}{1 - \operatorname{th}\frac{2\pi x}{\lambda}\operatorname{tg}\frac{2\pi x}{\lambda}},$$

le courant de charge s'obtenant en faisant $x = l$.

Conclusions.

Lorsque, entre les extrémités de deux pellicules conductrices (dont l'une au moins très faiblement conductrice) séparées par une lame diélectrique de faible épaisseur, on applique une différence de potentiel constante V_0, il y a propagation lente de la perturbation. La différence de potentiel entre les deux lames à la distance x acquiert une fraction kV_0 de la tension V_0 en un temps t tel que $\frac{x}{\sqrt{t}} = \text{const.}$

Si la différence de potentiel appliquée est fonction sinusoïdale du temps, l'amplitude de la différence de potentiel entre les deux électrodes, sauf une petite correction au voisinage de l'extrémité libre, décroît exponentiellement avec l'abscisse x.

La vitesse de propagation de la phase dépend beaucoup de la fréquence, il en résulte que si la différence de potentiel appliquée est simplement fonction périodique du temps, les harmoniques sont plus rapidement amortis que le terme fondamental, d'où la possibilité d'utiliser ces pellicules pour supprimer les harmoniques.

Enfin en haute fréquence, du fait de ces phénomènes de propagation, il est possible d'obtenir des capacités variables, fonction de la fréquence, avec de minces couches métalliques obtenues par pulvérisation cathodique.

Manuscrit reçu le 20 juillet 1943.

SUR L'INTERFÉROMÈTRE RAYLEIGH-ZEISS

Par Y. DOUCET.
Laboratoire Physique-Enseignement.

Sommaire. — La première partie de cet article est relative à l'étude théorique du mode de production des franges dans l'Interféromètre Rayleigh-Zeiss.

L'existence des discontinuités de la courbe d'étalonnage est expliquée par une variation progressive de l'ordre d'interférence de la frange achromatique. Le calcul montre que ces discontinuités peuvent se produire dans un sens ou dans l'autre suivant la valeur de la différence de dispersion solution-eau et de la dispersion du verre du compensateur. Leurs positions exactes peuvent être prévues ce qui facilite les mesures ultérieures.

On établit l'existence en lumière monochromatique de plusieurs courbes non parallèles à celle obtenue en lumière blanche. Un mode de calcul de la différence d'indice solution-eau en est déduit.

Un nouveau dispositif de mesures en lumière hétérogène rouge a été mis au point. Il diminue notablement le nombre de discontinuités, et l'on indique comment l'emploi d'un jeu de verres de compensateur permettrait l'obtention d'une courbe d'étalonnage continue.

La deuxième partie donne la variation des indices avec la concentration pour le chlorure de potassium, l'acide molybdique et les paramolybdates de sodium et d'ammonium.

I. — Partie théorique.

La cryoscopie par la méthode d'équilibre [13] nécessite la mesure postérieure de la concentration. Le procédé doit être sensible et permettre l'emploi de solutions diluées. Nous avons pensé, après Adams [1] et Karagunis [2], à utiliser l'interféromètre à eau de Lord Rayleigh-Haber-Löwe construit par Zeiss.

Une difficulté se présente pour l'étalonnage. Ces auteurs l'ont résolue de façons diverses, ce qui nous a incité à mettre au point la théorie de l'instrument.

1. Principe de l'appareil. — Le système de production des franges d'interférence dans cet appareil dérive du dispositif de Fraunhofer. En 1896,

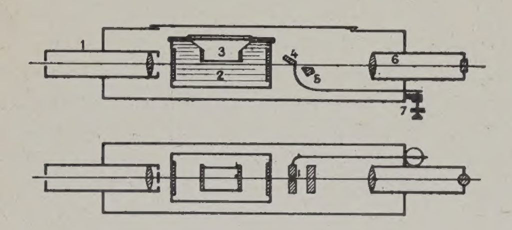


Fig. 1. — Schéma de l'interféromètre.

1, collimateur; 2, cuve à eau; 3, chambres à solutions; 4, compensateur; 5, lame à faces parallèles; 6, lunette à oculaire-cylindrique; 7, tambour du compensateur.

Lord Rayleigh [3], dans le but d'analyser l'argon qu'il venait d'isoler, utilisait une méthode interférométrique. Il comparait les pressions de deux gaz renfermés dans deux tubes de même longueur, en les faisant traverser par un faisceau de lumière parallèle provenant d'un collimateur. Les rayons rencontraient ensuite deux fentes placées sur l'objectif d'un télescope. On observait des franges au foyer de la lentille. On sait que l'interfrange est très faible et qu'il faut utiliser un objectif très grossissant, par conséquent peu clair. Lord Rayleigh a l'heureuse idée de lui substituer une lentille cylindrique d'axe parallèle aux raies, qui ne grossit que transversalement.

Quand on fait varier la pression d'un gaz, les franges défilent devant un réticule, mais elles sont sujettes à de soudains déplacements dus aux variations de la température ambiante. Il trouve un remède dans l'emploi d'un second système de franges formé par les faisceaux lumineux passant juste au-dessus des tubes, et qui sert de repère.

En 1910, Haber et Löwe [4] reprennent ce dispositif et l'adaptent à l'analyse des solutions. La différence de marche produite par la différence d'indice des deux liquides est compensée par l'inclinaison variable d'une lame de verre commandée par une vis micrométrique dont on lit les fractions de tour sur un tambour gradué. La frange centrale est remplacée par la frange achromatique que fournit la lumière blanche d'une petite ampoule électrique. Enfin, pour obtenir des franges stables, ils placent les deux chambres dans une cuve à eau.

Le schéma de l'appareil est donné ci-contre. Celui que nous avons utilisé est le modèle à autocollimation avec chambres de 2 cm.

2. Théorie du fonctionnement. — Les deux chambres contiennent de l'eau distillée. On éclaire en lumière blanche. On observe à la partie inférieure du champ les franges achromatiques fixes servant de repères, et d'autres semblables à la partie supérieure. Par le jeu du compensateur, on établit la coïncidence, ce qui détermine le zéro de l'échelle de mesure. L'eau d'une chambre est alors remplacée par une solution. La différence d'indice ν, qu'elle présente avec l'eau produit la différence de marche νl,

l étant la longueur géométrique du chemin optique. Les franges ne sont plus dans le champ de l'appareil. Elles y sont amenées par une nouvelle rotation de la lame du compensateur, qui introduit, en sens inverse, la différence de marche δ.

Si la compensation était correcte, la différence de marche produite par la solution serait égale à celle donnée par la lame de verre. On aurait $\delta = \nu l$. En portant en ordonnées les numéros du tambour T proportionnels à δ et en abscisses les concentrations m, proportionnelles à ν, on obtiendrait une courbe croissante continue, sensiblement rectiligne. *Or, on obtient une courbe formée de tronçons de droites décalées d'une quantité constante les uns par rapport aux autres.*

Hallwachs [5] qui, en 1892, utilisait un appareil du type Jamin l'avait déjà constaté, et en attribuait l'origine à la différence de dispersion entre la solution et le verre du compensateur. Marc [6] employant l'appareil de Löwe-Zeiss montre que c'est bien là, en effet, l'origine des discontinuités, mais il ne fait aucun calcul. Karagunis, Hawkinson, Damköhler en ont donné une explication qualitative assez complète, mais qui, évidemment, ne fournit pas les renseignements d'une étude quantitative comme celle de Siertsema [7] que, Hallwachs, Brodsky [8] et Adams [9] n'ont pu se procurer, et que nous n'avons pas trouvée non plus.

Voici comment on peut conduire le calcul :

a. Explication des discontinuités. — L'ordre d'interférence en un point du système de franges est

$$p = \frac{|\delta - \nu l|}{\lambda} \tag{1}$$

où δ et ν sont des fonctions de λ.

La condition d'achromatisme

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\lambda} = 0$$

donne

$$\lambda \frac{\mathrm{d}\delta}{\mathrm{d}\lambda} - \delta = -l\left(\nu - \lambda \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\lambda}\right). \tag{2}$$

L'utilisation de la lumière blanche fait ainsi apparaître l'indice relatif à la vitesse de groupe

$$\nu' = \nu - \lambda \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\lambda}.$$

Mais la compensation n'a pas lieu pour

$$\delta = \nu' l$$

à cause de la présence du terme $\frac{\mathrm{d}\delta}{\mathrm{d}\lambda}$. Elle ne se produit donc pas pour la frange centrale. Pour calculer l'ordre d'interférence de la frange « compensée » il faut expliciter $\frac{\mathrm{d}\delta}{\mathrm{d}\lambda}$ et pour cela calculer δ.

Le compensateur est une lame de verre d'épaisseur e inclinée à 45° sur le rayon lumineux. Par rotation d'un petit angle θ on change le chemin optique dans le verre et dans l'air. En négligeant des termes du second ordre on trouve

$$\delta = \frac{e\theta}{\sqrt{2}}\left[1 - (2n^2 - 1)^{-\frac{1}{2}}\right].$$

La dérivée logarithmique donne

$$\frac{\mathrm{d}\delta}{\mathrm{d}\lambda} = \delta \frac{2n}{(2n^2 - 1)\left[(2n^2 - 1)^{\frac{1}{2}} - 1\right]} \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}. \tag{3}$$

Posons $N = \dfrac{2n^2}{(2n^2 - 1)\left[(2n^2 - 1)^{\frac{1}{2}} - 1\right]}$

et résolvons (2) par rapport à δ en calculant $\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}$ et $\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\lambda}$ par les formules

$$n = A + \frac{B}{\lambda^2},$$

$$\nu = \alpha + \frac{\beta}{\lambda^2}$$

qui donnent une approximation suffisante.

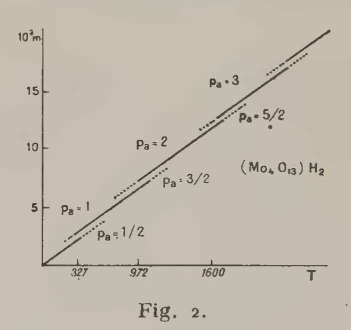


Fig. 2.

En portant δ dans (1) on obtient l'ordre d'interférence de la frange achromatique. C'est

$$p_a = \frac{2l}{\lambda_a} \frac{|\beta n - BN\nu|}{n\lambda_a^2 + 2BN}. \tag{4}$$

On voit, qu'en général, il n'est pas nul. Sa valeur n'est pas constante non plus : elle est fonction croissante des différences d'indices et de dispersion de la solution et de l'eau. On y trouve l'explication des discontinuités. En effet lorsque p_a atteint la valeur 1/2 c'est une raie noire qui serait « achromatique » c'est-à-dire que les deux franges brillantes adjacentes sont également blanches : il y a deux positions du tambour T et T' également possibles.

Si l'on prend maintenant une solution de concentration m' un peu plus grande que m, il y correspond une différence d'indice $\nu' > \nu$, et une valeur de p_a plus grande. C'est une frange voisine qui devient achromatique; elle le sera sans ambiguïté pour $p_a = 1$. Puis, pour des solutions croissantes, le même phénomène se reproduit. Ainsi, toutes les fois que la concentration est telle que,

$$p_a = K + \frac{1}{2},$$

K étant un nombre entier, on trouve deux numéros du tambour qui conviennent également. La courbe $m = f(T)$, présente donc des séries de discontinuités égales. Le phénomène est évidemment progressif et à chaque fois, l'indétermination se produit sur une assez grande étendue de l'échelle de mesure. On conçoit qu'il y ait quelques difficultés à la tracer et que la réalisation d'un grand nombre de solutions-étalons soit nécessaires.

b. Sens des discontinuités. — Le sens de ces discontinuités dépend du signe de p_a qui peut être positif ou négatif suivant que δ est plus grand ou plus petit que νl. La frange centrale pour la longueur d'onde λ correspond à $\delta = \nu l$.

Si $\delta > \nu l$ le compensateur amène la frange achromatique plus loin que la frange centrale, il y correspond des numéros T croissant par valeurs supérieures. Et inversement.

Nous avons observé le premier cas avec des solutions de K Cl et le deuxième avec l'acide métamolybdique.

L'équation (4) nous permet de préciser. Le sens des discontinuités est donné par le signe de la quantité $\frac{\beta}{\nu} - N\frac{B}{n}$ où n et ν sont les indices relatifs à la longueur d'onde achromatique.

Si $\frac{\beta}{\nu} > N\frac{B}{n}$ les discontinuités sont du type KCl, la compensation se produit au delà de la frange centrale (*fig.* 3).

Si $\frac{\beta}{\nu} < N\frac{B}{n}$ elles se produisent en sens inverse; le compensateur a une action insuffisante (*fig.* 2).

Enfin si $\frac{\beta}{\nu} = N\frac{B}{n}$ la frange achromatique correspond toujours avec la frange centrale $p = 0$. Il n'y a plus de discontinuités. C'est ce que Karagunis a trouvé pour des solutions de KF et RbF. Le compensateur est un crown d'indice 1,514 et de coefficient $B = 45.10^{-4}$, pour ces solutions $\frac{\beta}{\nu} = 42,6.10^{-4}$.

D'après Adams [9] cela se produirait aussi avec des solutions de sulfate et un compensateur en flint lourd. Pour $n = 1,96$ et $B = 130.10^{-4}$, $\frac{\beta}{\nu} = 106.10^{-4}$.

On verra plus loin comment on peut connaître le rapport $\frac{\beta}{\nu}$ d'une façon suffisamment approchée sans avoir tracé toute la courbe d'étalonnage. Si on peut choisir un verre tel que $\frac{NB}{n}$ soit sensiblement égale à cette valeur on tracera la courbe sans difficulté et avec un petit nombre de solutions-étalons. Ce serait donc une très grosse amélioration que de fournir avec l'appareil un jeu de compensateurs dont les indices et les formules de dispersion seraient connus.

c. Position des discontinuités. — La formule (4) permet de prévoir leurs positions exactes si l'on connaît la différence de dispersion β entre la solution et l'eau. L'expression $\frac{\beta}{\nu}$ reste sensiblement constante dans toute l'étendue du domaine de mesures accessibles. En introduisant cette quantité dans (4) et en écrivant $p_a = K + \frac{1}{2}$ on trouve :

$$\nu = \left(K + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2l}\,\frac{n\lambda^2 + 2NB}{\left|\frac{\beta}{\nu}n - NB\right|} \qquad (5)$$

où toutes les quantités sont connues. L'étude de la courbe avant la première discontinuité donnera, avec une précision suffisante, la relation $\nu = f(T)$; on saura donc ainsi à quels numéros précis du compensateur se placent les indéterminations. Nous donnerons des exemples plus loin.

3. **Emploi de lumière hétérogène.** — L'appareil de Zeiss fonctionne normalement en lumière blanche. Adams [9] l'emploie comme un instrument de zéro. Il compare la solution de titre inconnu avec d'autres solutions un peu plus fortes et un peu plus faibles, de façon que la différence des numéros correspondants du tambour soit inférieure à 200. Il fait alors une interpolation linéaire. Cela suppose, bien entendu, qu'on ne se trouve pas au voisinage d'une discontinuité. Dans ce cas, il faudra réaliser des solutions étalons qui encadreront de beaucoup plus près la solution inconnue. La méthode est longue et délicate.

Karagunis [2] préfère tracer entièrement la courbe à l'aide de solutions titrées. Pour lever le doute des indéterminations, il donne aux raies des indices « d'obscurcissement », par exemple 3 pour la plus noire et 1 pour celle nettement bordée de rouge. A une discontinuité, on note pour trois franges voisines, les indices 1, 2, 3 et 1, 3, 2 lorsqu'il n'y a aucune ambiguïté. Avec une certaine habitude, on note très bien le noircissement progressif d'une raie qui, d'indice 1 devient 2 puis 3, si l'on se place dans des conditions convenables (pièce obscure, œil dans une position invariable devant l'oculaire). Il forme les trois quotients $\frac{m}{T_1}$, $\frac{m}{T_2}$, $\frac{m}{T_3}$ et trace les familles de courbes $m = f(T)$ en reliant les positions d'une même raie quel que soit son degré d'obscurcissement. Pour rechercher alors le titre d'une solution inconnue, il note de même les trois raies, par exemple 1156_1 1178_3 1200_2. Le graphique fait connaître les trois facteurs $2,495.10^{-5}$, $2,438.10^{-5}$, $2,395.10^{-5}$. Si l'on ne se trompe pas de franges, on doit trouver trois valeurs égales pour m. Les trois multiplications donnent ici 0,02879, 0,02877, 0,02880.

En vue d'effectuer des mesures d'indices, Brodsky et Filippowa [10] tracent aussi une telle courbe, mais ils se bornent au premier segment qu'ils déterminent avec précision en contrôlant leurs mesures avec deux chambres de longueurs différentes. Puis

ils extrapolent, en prolongeant cette courbe dans tout le domaine étudié. Pour une concentration inconnue le rapport du nombre de franges doit être égal au rapport des longueurs des chambres. S'il n'en est pas ainsi, c'est qu'il faut ajouter 1, 2 ou 3 franges... à une des déterminations, c'est-à-dire qu'il s'est produit 1, 2 ou 3 discontinuités... Connaissant ce chiffre, on peut alors se reporter à la courbe extrapolée.

Geffcken et Kruis [11] font subir de grosses modifications à l'appareil de Zeiss et emploient une chambre tournante de longueur variable et différentes chambres dont les longueurs sont dans un rapport connu. C'est sans doute la méthode la plus précise, mais elle nécessite un appareillage compliqué.

Les calculs précédents nous ont mis sur la voie d'un procédé très simple qui espace les discontinuités et même qui les supprime sur toute l'étendue des mesures, lorsque la différence de dispersion totale côté eau et côté solution n'est pas trop grande.

Reprenant la formule (5) on peut écrire en première approximation :

$$\nu = \left(k + \frac{1}{2}\right) \frac{n\lambda_a^3}{2l\left|\frac{\beta}{\nu} n - BN\right|},$$

λ_a représente la longueur d'onde relative au maximum de sensibilité de l'œil pour la lumière blanche.

Mais, plaçons un verre coloré devant la lampe de l'interféromètre. On obtient une lumière hétérogène allant de λ à Λ. Nous ne pouvons plus, à proprement dire, parler « d'achromatisme »; cependant, il existe une frange ayant même composition spectrale que la lumière incidente et pour laquelle $\frac{dp}{d\lambda} = 0$, puisque l'ordre d'interférence, pour cette frange, varie peu de λ à Λ. On arrive donc à la même formule. L'indice ν étant proportionnel à la puissance 3 de λ il y a intérêt à opérer en lumière rouge. Avec un verre à usage photographique, on voit de 13 à 15 franges et celle qui est centrale est très facilement repérable.

Nous avons expérimenté ce procédé avec des solutions de paramolybdate d'ammonium. Il ne se présente aucune discontinuité sur toute l'étendue de l'échelle.

Par contre, elles existent encore avec KCl, mais il y en a environ deux fois moins. En effet, la longueur d'onde d'achromatisme étant de l'ordre de 0,57 μ. Les discontinuités ont lieu pour des indices ν qui sont $\frac{0,7^3}{0,57^3} = 1,85$ fois plus grands.

On pourrait penser réduire encore l'influence de la dispersion en diminuant la largeur de la bande de longueur d'onde utilisée. Pour introduire cette quantité dans le calcul, on écrit que l'ordre d'interférence pour λ est le même que pour Λ, pour une certaine épaisseur x_a. On trouve p_a en portant x_a dans p_λ ou dans p_Λ. Il vient, en négligeant les termes du second ordre :

$$p_a = \frac{l}{n} \left| \beta n - N\nu B \right| \frac{\lambda + \Lambda}{\lambda^2 \Lambda^2}. \qquad (4')$$

En écrivant maintenant la condition de discontinuité $p_a = \frac{1}{2}$, on trouve que ν_1 est proportionnel à la quantité $\frac{(\lambda_a^2 - \varepsilon^2)^2}{2\lambda_a}$ en désignant par 2ε la largeur de la bande. On voit que ν_1 ne change pas sensiblement, si ε devient, par exemple, deux fois plus petit. C'est bien ce que nous avons constaté avec des verres laissant passer les bandes 0,720 — 0,650; 0,700 — 0,600; 0,740 — 0,590.

Nous avons aussi employé une fente de largeur variable se déplaçant dans le spectre continu d'une forte lampe à incandescence. Quand on réduit sa largeur de moitié, on ne gagne, avec KCl par exemple, qu'une discontinuité sur 13. Par contre, on diminue beaucoup la clarté et l'on augmente rapidement le nombre de franges visibles, ce qui ne permet plus de les compter.

4. **Emploi de lumière monochromatique.** — Il est bien évident alors que les discontinuités, liées au phénomène de dispersion n'existent plus. La difficulté est de trouver la frange centrale.

On éclaire l'appareil avec une des raies spectrales d'une lampe à vapeur de mercure, en disposant un monochromateur à la place de la petite lampe et de son support. En utilisant successivement les raies voisines 0,546 et 0,578 on constate, pour une certaine position du compensateur, que les franges s'élargissent sur place en passant du vert au jaune. Si l'on s'écarte d'une frange dans un sens puis dans l'autre elles ne coïncident plus avec les raies du système-repère et sont décalées symétriquement. Obtient-on, ainsi, la frange centrale? Non, en général, car dire que les franges λ et Λ sont à la même place, c'est dire que leur ordre d'interférence est le même $p_\lambda = p_\Lambda$. Cette égalité peut avoir lieu *pour des valeurs différentes de zéro.* Nous avons déjà écrit cette condition et trouvé que la valeur commune est p_a donné par (4'). Si on la compare avec l'ordre d'interférence de la frange achromatique donné par (4) on voit que λ_a^3 est remplacée par $\frac{2\lambda^2\Lambda^2}{\lambda + \Lambda}$, c'est-à-dire que λ_a vaut très sensiblement la moyenne arithmétique de λ et Λ. Avec $\lambda = 0,546$, $\Lambda = 0,578$ on a $\lambda_a = 0,562$. Cette valeur est voisine de la longueur d'onde d'achromatisme, par conséquent on obtient par ce procédé de substitution une courbe d'étalonnage ayant autant de discontinuités que celle obtenue en lumière blanche.

Cependant la méthode a été employée par Brodsky et Scherschewer [8]. N'ayant pas à leur disposition un spectre de raies assez lumineux, ils utilisent un spectre continu et une fente fine. Ils constatent

que la coïncidence pour 2λ voisines ne persiste plus lorsque la concentration augmente, mais ils pensent résoudre la question en déplaçant la fente d'une plus petite quantité. Or, nous avons montré que l'intervalle des deux λ n'a pas grande importance. Le problème n'est pas ainsi résolu.

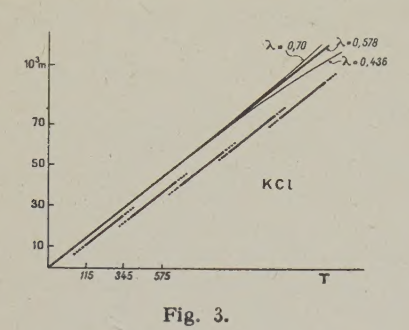


Fig. 3.

D'ailleurs, pour une concentration déterminée, non nulle, il y a autant de franges centrales qu'on envisage de lumière monochromatique. En effet soit F l'ordre d'interférence de la frange centrale λ pour une différence d'indice ν, on a $F = \frac{\nu l}{\lambda}$. La même solution présente une différence d'indice ν' pour la longueur d'onde λ' et par suite $F' = \frac{\nu' l}{\lambda'}$. Le rapport peut s'écrire en négligeant les termes du second ordre :

$$\frac{F}{F'} = \frac{\lambda'}{\lambda} + \frac{\beta}{\alpha}\frac{\lambda'^2 - \lambda^2}{\lambda^3\lambda'}.$$

La dispersion introduit donc un décalage

$$\Delta F = \frac{\beta}{\alpha}\frac{\lambda'^2 - \lambda^2}{\lambda^3\lambda'}F'. \quad (6)$$

L'intervalle entre les franges centrales de λ et λ' augmente donc avec l'ordre d'interférence : les courbes d'étalonnage pour différentes longueurs d'onde sont communes à l'origine et vont en divergeant (*fig.* 3).

Utilisons alternativement la lumière blanche et la lumière jaune du mercure (0,578), on constate expérimentalement que la compensation réalisée en franges achromatiques persiste toujours — même pour un ordre d'interférence de 200 — avec les franges jaunes. Par conséquent la courbe qu'on obtiendrait avec la longueur d'onde 0,578 est distante d'un nombre entier de franges de la courbe discontinue obtenue en lumière blanche. Ces deux courbes sont parallèles. Pour $\lambda > 0{,}578$ la courbe « monochromatique » s'éloigne de la courbe discontinue et s'en rapproche, au contraire, pour $\lambda < 0{,}578$.

5. Mesures de différences d'indices de réfraction. — La différence d'indice est donnée par la relation

$$\nu = \frac{F\lambda}{l}.$$

Le nombre F s'obtient par la mesure de l'ordre d'interférence f de la frange colorée λ qui prend la place de la frange achromatique, mesure à laquelle on fera subir une correction.

La connaissance de f suppose un étalonnage préalable de la vis en longueur d'onde. La méthode est celle de Gans-Bose [12]. On détermine $\frac{df}{dT}$ par des mesures de ΔT pour $\Delta f = \pm 5$ tous les 500 numéros de l'échelle. Le graphique donne la droite

$$\frac{df}{dT} = a - 2bT, \quad \text{d'où} \quad f = aT - bT^2.$$

A vrai dire, cette relation ne peut donner avec précision que le nombre entier de franges, à cause des irrégularités de la vis. On détermine directement l'excédent fractionnaire ε en ramenant le tambour au voisinage de zéro et en lisant le numéro t qui assure la coïncidence, on a $\varepsilon = at$.

Le mode opératoire que nous avons utilisé est alors le suivant :

1° Déterminer la courbe en lumière hétérogène rouge, d'une longueur d'onde moyenne de 0,7μ. La bande rouge fournie par la lampe à vapeur de mercure à haute pression autour de la raie 6907 Å convient fort bien.

2° Pour une solution de concentration donnée chercher la frange « achromatique » comme ci-dessus puis passer en vert 0,546. Rectifier le réglage par un déplacement dans le sens des numéros croissants. A partir du numéro T obtenu on calculera f dont on ne retiendra que la partie entière. Ramener le compensateur à zéro et lire le numéro t, donnant l'excédent fractionnaire.

3° Passer en bleu 0,436 et faire les mêmes opérations, on a f_B.

4° Calculer F_V et F_B. La correction à faire subir à f_V pour obtenir F_V serait d'un nombre entier égal au nombre de discontinuités qui ont eu lieu jusque-là, si la courbe d'étalonnage pour λ = 0,546 était parallèle à la courbe discontinue rouge. Comme il n'en est rien il faut calculer ΔF par la formule (6) où F' est l'ordre d'interférence en lumière rouge f' corrigé du nombre entier de discontinuités. Lorsque $\Delta F < 1$ cette correction est faite en rectifiant le réglage (2°); lorsque $\Delta F > 1$ cette rectification n'est faite qu'à une frange près. On tiendra donc compte seulement de la partie entière de ΔF.

Ce calcul suppose la connaissance de $\frac{\beta}{\alpha}$. Lorsqu'il n'existe pas dans les tables de constantes, on le mesure, avec une précision suffisante pour effectuer la correction, par les premières mesures en solutions diluées où $\Delta F < 1$. On a

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\lambda'^3\lambda}{\lambda^2 - \lambda'^2}\frac{F'}{F} - \frac{\lambda^2\lambda'^2}{\lambda^2 - \lambda'^2}. \quad (7)$$

Dans le cas de l'acide molybdique, la correction ΔF

n'atteint une frange bleue qu'au n° 1000, c'est-à-dire au tiers de l'échelle de mesure, mais il peut être très important avec d'autres corps. Par exemple, avec des solutions d'eau lourde. Crist, Murphy et Urey [12] signalent qu'il y a une discontinuité tous les 50 numéros du tambour, c'est-à-dire à peu près toutes les 3 franges.

5° Calculer ν_V et ν_B pour les deux longueurs d'onde étudiées, après avoir mesuré l à 1/1000e près. En déduire la relation entre α et la concentration m.

On pourrait opérer de même avec la lampe à vapeur de cadmium, qui donne la raie rouge 0,6438 et la raie verte 0,5086, et la lampe à vapeur de sodium.

La raie jaune du mercure 0,577-0,579 n'est pas utilisable car elle n'admet pas un ordre d'interférence assez élevé pour pouvoir lire l'excédent fractionnaire en ramenant le tambour au voisinage du zéro.

II. — Partie expérimentale.

1. Chlorure de potassium. — *a. Courbe d'étalonnage.* — On établit à la balance, avec toutes les corrections nécessaires, une série de solutions de molarités connues, avec du chlorure de potassium RP Poulenc recristallisé et bien sec. On les examine en lumière hétérogène rouge pour une longueur d'onde moyenne de 0,691 μ. Les quotients $\frac{m}{T}$ se placent sur des arcs de paraboles très tendus. Le premier correspond à une valeur de l'ordre de $8{,}9.10^{-5}$; le deuxième de $8{,}5.10^{-5}$; le troisième de $8{,}3.10^{-5}$, etc... (*fig.* 4).

La position exacte de ces discontinuités sera calculée plus loin, à partir de la quantité $\frac{\beta}{\alpha}$ pour laquelle la valeur approchée obtenue avec le premier tronçon, suffit. C'est cette courbe qui nous a permis de trouver les molarités des solutions prélevées dans un appareil cryoscopique, après la mesure de la température d'équilibre.

L'erreur absolue sur T est de 0,1 par conséquent m est connu à $0{,}85.10^{-5}$ près. On peut donc donner deux décimales à la concentration exprimée en 1/1 000e de molécule.

b. Mesure de la dispersion. — Il faut d'abord étalonner la vis en nombre de franges. On a trouvé pour la raie verte du mercure

$$f_V = 0{,}0683\,T - 24{,}4.10^{-7}T^2$$

et pour la raie bleue

$$f_B = 0{,}0856\,T - 31.10^{-7}T^2.$$

Pour chaque concentration de titre connu m on a fait les calculs que nous indiquerons par les deux exemples suivants :

1° $m = 22{,}003.10^{-3}$, $T_{achro} = 263{,}0$, $T_V = 265{,}2$, $T_B = 268{,}0$, $f_V = 17$, ..., $\varepsilon^V = 0{,}0683 \times 13{,}5 = 0{,}922$.

La quantité ΔF écart entre la frange centrale verte et la frange achromatique est inférieure à 1. Il n'y a pas à en tenir compte. D'autre part, il y a eu une discontinuité, donc $F_V = 16{,}92$. Le même raisonnement donne $F_B = 22{,}90$. L'équation (7) s'écrit :

$$\frac{\beta}{\alpha} = 0{,}419\,\frac{F_B}{F_V} - 0{,}52469.$$

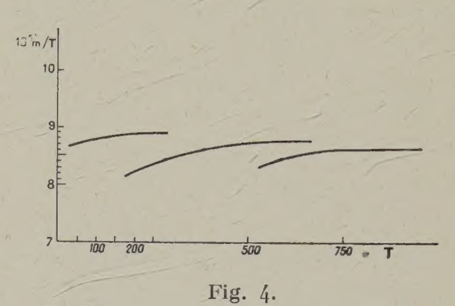


Fig. 4.

On trouve ici $\frac{\beta}{\alpha} = 176.10^{-4}$ λ étant mesuré en μ.

2° $m = 104{,}67.10^{-3}$, $T_{achro} = 1319{,}5$, $f_V = 86$, ..., $\varepsilon_V = 0{,}68\,\Delta F$

est encore inférieure à 1. Il y a eu 6 discontinuités, donc $F_V = 80{,}68$, $F_B = 106$, ..., $\varepsilon_B = 0{,}5$, $\Delta F = 176.10^{-4} \times 3{,}01 \times 80 = 4{,}24$ en admettant la valeur précédente pour $\frac{\beta}{\alpha}$. On s'est donc trompé de 4 franges en rétablissant la coïncidence des raies, quand on est passé en lumière bleue. D'autre part, il y a 6 discontinuités. L'écart avec la frange centrale est donc d'après leur sens de $6 - 4 = 2$ franges, soit $F_B = 104{,}5$.

Il vient alors $\frac{\beta}{\alpha} = 180.10^{-4}$.

La moyenne de 11 déterminations nous a donné $\frac{\beta}{\alpha} = 176.10^{-4}$.

c. Mesures d'indices. — Connaissant F_B et F_V on a immédiatement les différences d'indice pour le vert et le bleu par la relation $\nu = \frac{F\lambda}{l}$. Pour $l = 4$ cm (car la chambre de 2 cm est traversée deux fois par la lumière) on trouve dans les deux exemples ci-dessus :

$m = 22{,}003.10^{-3}$, $\nu_V = 2{,}310.10^{-4}$, $\nu_B = 2{,}386.10^{-4}$,
$m = 104{,}67.10^{-3}$, $\nu_V = 11{,}015.10^{-4}$, $\nu_B = 11{,}385.10^{-4}$.

On peut calculer α à partir de ν. On trouve que les quotients $\frac{\alpha}{m}$ sont constants dans le domaine mesuré, c'est-à-dire jusqu'à $m = 0{,}200$. Pour le premier exemple $\frac{\alpha}{m} = 99{,}2.10^{-4}$ et pour le deuxième $\frac{\alpha}{m} = 99{,}6.10^{-4}$.

La valeur moyenne de nos déterminations fournit la relation

$$\frac{\alpha}{m} = 98.10^{-4}.$$

La différence d'indice ν pour la longueur d'onde λ est donc liée à la concentration m par la formule

$$\nu = \left(98 + \frac{1,715}{\lambda^2}\right).10^{-4} m,$$

où λ est compté en μ et m en nombre de molécules-grammes, pour 1000 g de solution.

d. Position des discontinuités. — La formule (5) s'écrit avec

$$\lambda = 0,7\mu, \quad l = 4 \text{ cm}, \quad n = 1,514,$$
$$B = 45.10^{-4}, \quad N = 1,434, \quad K = 0,$$

$$\nu_1 = \frac{330,2.10^{-4}}{1,514\frac{\beta}{\nu} - 64,5.10^{-4}}.$$

De $\frac{\beta}{\alpha} = 176.10^{-4}$ on tire

$$\frac{\beta}{\nu} = 170.10^{-4} \quad \text{pour} \quad \lambda = 0,7.$$

On trouve $\nu_1 = 1,71.10^{-4}$. La première discontinuité a donc lieu lorsque la concentration est de l'ordre de

$$m = \frac{1,71.10^{-4}}{98.10^{-4}} = 0,017.$$

Dans cette région

$$\frac{m}{T} = 8,9.10^{-5}, \quad \text{d'où} \quad T = 191.$$

La deuxième discontinuité sera pour $m_2 = 0,051$,

$$T_2 = \frac{51.10^{-3}}{8,5.10^{-5}} = 600,$$

la troisième à $T = 1012$, etc.

Ce calcul facilite beaucoup la recherche des discontinuités.

2. **Acides molybdiques.** — Les discontinuités se produisent dans le sens inverse de celui qu'on observait pour le chlorure de potassium (*fig.* 2). On a donc $\frac{\beta}{\alpha} < 43.10^{-4}$. Les valeurs trouvées oscillent autour de zéro. Le coefficient de dispersion des solutions d'acide molybdique de concentration inférieure à 0,145 M est le même que celui de l'eau.

En lumière blanche, le déplacement d'une frange a lieu tous les 660 numéros et en lumière rouge de la lampe à vapeur de mercure, tous les 1150 numéros. Le premier tronçon, sensiblement rectiligne, correspond à

$$\frac{m}{T} = 6,29.10^{-5}.$$

La différence d'indice est la même pour toutes les couleurs, puisque $\beta = 0$. On trouve

$$\nu = 148.10^{-4} m.$$

3. **Paramolybdates de sodium et d'ammonium.** — En lumière hétérogène rouge, on n'observe pas de discontinuités sur toute l'étendue de l'échelle de mesure. Le rapport $\frac{\beta}{\alpha}$ doit être sensiblement le même que celui du crown de notre appareil. De fait, le calcul donne $\frac{\beta}{\alpha} = 33.10^{-4}$, ce qui situe le premier déplacement à $T = 2800$, c'est-à-dire pour la solution de concentration voisine de 0,010 M qui est la plus forte que l'on puisse passer à l'interféromètre.

La courbe d'étalonnage est une parabole d'équation :

$$10^5 m = 0,329T - 0,147T^2.$$

Elle est la même pour les deux paramolybdates de sodium et d'ammonium.

Le rapport de la différence d'indice α à la molarité m est remarquablement constant. On a

$$\alpha = 0,2351 m.$$

La comparaison avec les deux relations précédentes :

$$\alpha = 0,0098 m$$

pour KCl et

$$\alpha = 0,0148 m$$

pour $Mo_4O_{13}H_2$ montre le grand pouvoir réfringent des solutions de molybdates, par rapport à celles de KCl, à concentrations égales.

Manuscrit reçu le 6 mars 1943.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] ADAMS, *J. Am. Chem. Soc.*, 1915, **37**, p. 481.
[2] KARAGUNIS-HAWKINSON-DAMKOLHER, *Z. Phys. Chem.*, 1930, **151** A, p. 433.
[3] Lord RAYLEIGH, *Proc. Roy. Soc.*, 1896, **59**, p. 203.
[4] F. HABER-F. LOWE, *Z. angew. Chem.*, 1910, **23**, p. 1393.
[5] HALLWACHS, *Ann. Phys.*, 1892, **47**, p. 380.
[6] MARC, *Chem. Zeit.*, 1912, p. 537.
[7] SIERTSEMA, *Diss. Groningen*, 1890.
[8] BRODSKY-SCHERSCHEWER, *Z. Phys. Chem.*, 1931, **155** A, p. 417.
[9] ADAMS, *J. Am. Chem. Soc.*, 1915, **37**, p. 1181.
[10] BRODSKY-FILIPPOVA, *Z. Phys. Chem.*, 1933, **23** B, p. 399.
[11] GEFFCKEN-KRUIS, *Z. Phys. Chem.*, 1933, **23** B, p. 175; 1933, **166** A, p. 16.
[12] CRIST-MURPHY-UREY, *J. Chem. Phys.*, 1934, **2**, p. 112.
[13] Y. DOUCET, *J. de Physique*, 1942, **3**, p. 177.